



# revista **CARTOGRAFICA**

Julio-Diciembre 1991

**CARTOGRAFICA**



60

Número 60  
Julio-Diciembre 1991

Instituto Panamericano  
de Geografía e Historia



# Transformaciones de Desviaciones de la Vertical entre dos Datums

Tomás Soler\*

## Abstract

Recent investigations have shown that observations to satellites of the Global Positioning System (GPS) in conjunction with classical geodetic leveling produce very accurate components of the deflection of the vertical. This work introduces a rigorous method to transform vertical deflections originally known on a local datum to a geocentric datum compatible with GPS observations. Examples related to the two most representative South American datums are discussed.

## Resumen

Investigaciones recientes han probado que mediante observaciones conjuntas a satélites del Sistema de Posicionamiento Global (GPS) y de nivelación geodésica clásica, se pueden calcular con gran exactitud las componentes de la desviación de la vertical. Este trabajo introduce un método riguroso para transformar desviaciones de la vertical originalmente conocidas en un datum local no geocéntrico a un datum geocéntrico compatible con las observaciones GPS. Se discuten ejemplos relacionados con los datums locales más representativos del continente sudamericano.

## Introducción

Recientemente se ha demostrado (Soler *et al.*, 1989; Evans *et al.*, 1989; Fujii 1990, Dedes y Cruz, 1991) que la nivelación geodésica convencional combinada con la nueva tecnología y los métodos satelitales modernos del Sistema de Posicionamiento Global (GPS) posibilitan la determinación precisa de las dos componentes de la desviación de la vertical  $\eta$  y  $\xi$  en forma completamente independiente de observaciones

\* National Geodetic Survey, C&GS, NOS, NOAA; N/CG143, Silver Spring, MD 20910, USA.

astronómicas. Sin embargo, se debe mencionar que estas desviaciones están referidas al datum WGS84 implícitamente definido en las observaciones y reducciones de datos GPS. Si las componentes  $\eta$  y  $\xi$ , determinadas por medio de la combinación GPS y nivelación, se desean comparar con otros valores ya conocidos pero determinados por medios astrogeodésicos clásicos, usualmente referidos a otros datums previamente establecidos y distintos del WGS84, es imprescindible una transformación rigurosa de las desviaciones de la vertical entre los dos datums.

El objetivo de este artículo es presentar ecuaciones generales directas para transformar las componentes de la desviación de la vertical  $\eta$  y  $\xi$  entre dos datums arbitrarios (inicial y final) simbólicamente representados por D1 y D2. Estas ecuaciones se complementan con la inclusión de los efectos debidos al cambio de datum en el azimut geodésico  $\alpha$ .

Al mismo tiempo, y dado el interés actual por conocer con la mayor precisión posible las ondulaciones del geode  $N_g$  con respecto a un elipsoide geocéntrico, también se discuten en este trabajo las variaciones de diferenciales de la altura del geode debidas a su supuesto cambio de datum. Consecuentemente, es posible efectuar transformaciones rigurosas entre ondulaciones astrogeodésicas referidas a un elipsoide no geocéntrico y ondulaciones absolutas.

#### Variaciones diferenciales de longitud, latitud y altura geodésica

En una publicación precedente (Soler y van Gelder, 1985), fueron introducidas fórmulas en notación matricial para calcular los cambios diferenciales en longitud, latitud y altura geodésica debido a variaciones del elipsoide de referencia, bien sean, traslaciones, rotaciones, cambio de escala, dimensión (semieje mayor  $a$ ) y forma (aplamiento  $f$ ). Una característica especial de estas ecuaciones es su expansión hasta las derivadas parciales de segundo orden y la inclusión de los efectos conjuntos de cambios de escala y semieje mayor en el datum inicial D1. En resumen, alterando ligeramente la notación para adaptarla mejor a los objetivos de la presente discusión, cuando transformamos coordenadas curvilíneas geodésicas  $(\lambda, \phi, h)$  de un datum inicial D1 a otro final D2, el proceso se puede escribir simbólicamente como:

$$\left. \begin{array}{c} \lambda \\ \phi \\ h \end{array} \right\}_{D2} = \left. \begin{array}{c} \lambda \\ \phi \\ h \end{array} \right\}_{D1} + \left. \begin{array}{c} d\lambda \\ d\phi \\ dh \end{array} \right\} \quad (1)$$

El vector conteniendo las correcciones diferenciales  $(d\lambda, d\phi, dh)$  a los valores originales de la longitud  $\lambda$ , latitud  $\phi$  y la altura geodésica  $h$  en el datum D1 se obtiene implementando la ecuación:

$$\begin{Bmatrix} d\lambda \\ d\phi \\ dh \end{Bmatrix} = H^{-1} R \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix}_{7 \text{ par.}} + \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix}_{\delta a, \delta f} \quad (2)$$

La matriz H, ocasionalmente denominada matriz de Lamé porque contiene los llamados elementos diferenciales de primer orden de Lamé (Lamé 1837) se puede escribir explícitamente en el caso de coordenadas curvilíneas (ortogonales) geodésicas [Soler 1976]:

$$H = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & M+h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{D1} \quad (3)$$

donde:

N = a/W, radio de curvatura principal del primer vertical del punto

M = a(1-e<sup>2</sup>)/W<sup>3</sup>, radio de curvatura principal del meridiano del punto

W = (1-e<sup>2</sup> sin<sup>2</sup>φ)<sup>1/2</sup>

e<sup>2</sup> = 2f-f<sup>2</sup> (e es la excentricidad del elipsoide)

En lo sucesivo, matrices con un subíndice D1 como en (3) indicarán que todos sus elementos están referidos al datum D1.

La matriz R es la matriz de rotación entre el sistema cartesiano geodésico (u, v, w) con origen en el centro del datum D1 y el sistema geodésico local (topocéntrico) del punto en cuestión.

$$R = R_1(\frac{1}{2}\pi-\phi)R_3(\lambda+\frac{1}{2}\pi) = \begin{bmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\phi\cos\lambda & -\sin\phi\sin\lambda & \cos\phi \\ \cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda & \sin\phi \end{bmatrix}_{D1} \quad (4)$$

Los lectores no familiarizados con las definiciones de las matrices elementales de rotación R<sub>i</sub>(θ), i=1, 2, 3, pueden consultar por ejemplo, Mueller (1969, p. 43).

### Variaciones diferenciales ocasionadas por traslaciones, rotaciones y escala

Los cambios diferenciales ocasionados por los siete grados de libertad (tres traslaciones, tres rotaciones y un factor de escala) involucrados en la posible transformación de sistemas cartesianos asociados a los datums D1 y D2, son:

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix}_{7 \text{ par.}} = \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta s & (1+\delta s)\delta\omega & -(1+\delta s)\delta\psi \\ -(1+\delta s)\delta\omega & \delta s & (1+\delta s)\delta\epsilon \\ (1+\delta s)\delta\psi & -(1+\delta s)\delta\epsilon & \delta s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (5)$$

donde  $u, v, w$  son las coordenadas cartesianas del punto en el datum D1. Como en este caso partimos de coordenadas curvilíneas geodésicas [ver ecuación (1)], el vector  $(u \ v \ w)^t$  en (5) se debe substituir por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (N+h)\cos\phi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\phi\sin\lambda \\ [N(1-e^2)+h]\sin\phi \end{Bmatrix}_{D1} \quad (6)$$

Los demás símbolos en la ecuación (5) tienen el siguiente significado:

- $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  = Coordenadas del origen del elipsoide correspondiente al datum D1 expresadas en el sistema cartesiano asociado con el datum D2.
- $\delta\epsilon, \delta\psi, \delta\omega$  = Rotaciones diferenciales (expresadas en radianes), alrededor de los ejes  $(u, v, w)$  del datum D1 [ver Figura 1] hasta conseguir el paralelismo con los ejes  $(x, y, z)$  del datum D2. Se consideran positivas rotaciones contrarias a las agujas del reloj cuando son vistas desde el exterior de los ejes coordenados.
- $\delta s$  = Cambio diferencial de escala entre los datums D1 y D2 (se expresa en  $\text{ppm} \times 10^{-6}$ , donde ppm= partes por millón).

**Variaciones diferenciales ocasionadas por cambios en la dimensión y forma del elipsoide**

Las contribuciones diferenciales debidas a la selección de un nuevo elipsoide en la ecuación (2) se expresan:

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix}_{\delta a, \delta f} = - \left[ [D] + \frac{1}{2} [ [D_a]\delta a + [D_f]\delta f ] \right] \begin{Bmatrix} \delta a \\ \delta f \end{Bmatrix} \quad (7)$$

donde las matrices de orden  $3 \times 2$ ,  $[D]$ ,  $[D_a]$  y  $[D_f]$  se calculan a partir de:

$$[D] = \begin{bmatrix} \partial u/\partial a & \partial u/\partial f \\ \partial v/\partial a & \partial v/\partial f \\ \partial w/\partial a & \partial w/\partial f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\lambda/W & a(1-f)\sin^2\phi\cos\phi\cos\lambda/W^3 \\ \cos\phi\sin\lambda/W & a(1-f)\sin^2\phi\cos\phi\sin\lambda/W^3 \\ (1-e^2)\sin\phi/W & (1-f)\sin\phi(M\sin 2\phi - 2N) \end{bmatrix}_{D1} \quad (8)$$

$$[D_a] = \frac{\partial}{\partial a} [D] = \begin{bmatrix} \partial^2 u/\partial a^2 & \partial^2 u/\partial a \partial f \\ \partial^2 v/\partial a^2 & \partial^2 v/\partial a \partial f \\ \partial^2 w/\partial a^2 & \partial^2 w/\partial a \partial f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (1-f)\sin^2\phi\cos\phi\cos\lambda/W^3 \\ 0 & (1-f)\sin^2\phi\cos\phi\sin\lambda/W^3 \\ 0 & (1-f)\sin\phi[(1-f)^2\sin^2\phi - 2W^2]/W^3 \end{bmatrix}_{D1} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 [D_1] = \frac{\partial}{\partial f} [D] &= \begin{bmatrix} \partial^2 u / \partial f \partial a & \partial^2 u / \partial f^2 \\ \partial^2 v / \partial f \partial a & \partial^2 v / \partial f^2 \\ \partial^2 w / \partial f \partial a & \partial^2 w / \partial f^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (1-f)\sin^2\phi\cos\phi\cos\lambda/W^3 \\ (1-f)\sin^2\phi\cos\phi\sin\lambda/W^3 \\ (1-f)\sin\phi[(1-f)^2\sin^2\phi-2W^2]/W^3 \\ (3M\sin^2\phi-N)\sin^2\phi\cos\phi\cos\lambda/W^2 \\ (3M\sin^2\phi-N)\sin^2\phi\cos\phi\sin\lambda/W^2 \\ \sin\phi[(1-f)^2\sin^2\phi(3M\sin^2\phi-4N)-W^2(M\sin^2\phi-2N)]/W^2 \end{bmatrix}_{D_1} \quad (10)
 \end{aligned}$$

Los cambios diferenciales  $\delta a$  y  $\delta f$  requeridos en la ecuación (7), se obtienen usando las expresiones:

$$\delta f = f_{D_2} - F_{D_1} = \text{Cambio de aplanamiento entre los elipsoides de los dos datums} \quad (11)$$

$$\delta a = a_{D_2} - a_{D_1} + a_{D_1} \delta s = \delta \bar{a} + a_{D_1} \delta s = \text{Cambio total de semiejes mayores entre los dos datums cuando también existe un cambio de escala } \delta s. \quad (12)$$

Se debe aclarar aquí, que aunque muchos autores (por ejemplo [Chen 1982] y [Pierozzi 1989]) suponen  $\delta a = \delta \bar{a}$ , esta igualdad es sólo rigurosa en el caso hipotético y poco probable de que no haya cambio de escala entre los dos datums, esto es, sólo si  $\delta s = 0$ . Consecuentemente,  $\delta \bar{a} = 0$  (no hay cambios de semiejes de elipsoide entre los datums D1 y D2) no implica  $\delta a = 0$  en la ecuación (12) cuando hay cambios de escala, o sea cuando  $\delta s \neq 0$ . Si la requerida contribución de  $\delta s$  a  $\delta a$  en la ecuación (12) se ignora, errores sistemáticos (que afectan principalmente las alturas geodésicas) son introducidos (ver Soler y van Gelder [1985]). Finalmente, es necesario enfatizar que los dos cambios  $\delta a$  y  $\delta s$  son perfectamente compatibles y pueden ocurrir simultáneamente (como de hecho ocurre). Por lo tanto ambos deben ser considerados en ecuaciones del tipo (2), requerimiento éste que se discutió originariamente en (Soler 1976). Algunos autores, como Vaňíček y Krakiwsky (1986, pp. 333 y 570) aún prefieren seguir el razonamiento adoptado por Molodenskii *et al.* (1960) en su ya clásico trabajo, donde se supuso que todo el cambio de escala en la transformación de datums era absorbido por  $\delta a$ . Sin embargo, esta simplificación no es totalmente correcta y ya la insinuó Hotine (1966, p. 264) sin elaborar los detalles.

### Contribuciones diferenciales a las ondulaciones del geode $N_g$ cuando se cambia de datums

Es bien sabido que la relación entre la altura geodésica  $h$  (también llamada altura elipsoidal), la ondulación del geode,  $N_g$ , y la altura ortométrica  $H$  (determinada por medio de nivelación geodésica) se puede escribir:

$$h \approx N_g + H \quad (13)$$

Esta relación no es exacta (de ahí el signo  $\approx$ ) porque  $h$  es una cantidad geométrica y se mide a lo largo de la normal al elipsoide, mientras que  $N_g$  y  $H$  son cantidades físicas, y se miden a lo largo de la línea curva de la plomada. Sin embargo, los errores introducidos con la aproximación establecida en (13) son prácticamente despreciables.

Diferenciando esta ecuación y teniendo presente que  $H$  es independiente del elipsoide de referencia y por lo tanto invariable con respecto a cambios geométricos de datum obtenemos,

$$dh \approx dN_g \quad (14)$$

Una consecuencia importante de la expresión (14) es que las variaciones diferenciales (debidas a una transformación geométrica de datums) de las ondulaciones geodésicas  $N_g$  en un punto arbitrario, son aproximadamente iguales a los cambios diferenciales de la altura geodésica  $h$ .

Dado que la transformación de datums que se está discutiendo aquí es estrictamente geométrica, ésta no presume cambios en las propiedades físicas que puedan tener los elipsoides, bien sea su masa, o su potencial gravitatorio.

A partir de la ecuación (2) podemos obtener explícitamente después de multiplicar las matrices y simplificar:

$$\begin{aligned} dN_g \approx dh = & \cos\phi\cos\lambda\Delta x + \cos\phi\sin\lambda\Delta y + \sin\phi\Delta z \\ & + Ne^2\sin\phi\cos\phi(\cos\lambda\delta\psi - \sin\lambda\delta\epsilon) + (aW+h)\delta s - W\delta a \\ & + a(1-f)\sin^2\phi\delta f/W + (1-f)\sin^2\phi[(3f-2f^2)\sin^2\phi - 1]\delta a\delta f/W^3 \\ & + \sin^2\phi[2MW\sin^2\phi + a(1-3\sin^2\phi)]\delta f^2/2W^3. \end{aligned} \quad (15)$$

Observemos que además de la extensión a las diferenciales de segundo orden, las contribuciones de los cambios de escala discutidas en (12) que afectan  $\delta a$  también están representados en la ecuación (15). Esta expresión es pues más rigurosa que otras fórmulas de este tipo hasta ahora publicadas (Rapp 1983). En resumen, las ondulaciones en el datum D2 después de los cambios geométricos en el datum D1 se pueden finalmente escribir:

$$N_{gD2} = N_{gD1} + dN_g$$

**Variaciones diferenciales de la desviación de la vertical y el azimut geodésico**

Usando un razonamiento análogo al empleado en la ecuación (1), se podrá escribir:

$$\begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \\ \alpha \end{Bmatrix}_{D2} = \begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \\ \alpha \end{Bmatrix}_{D1} + \begin{Bmatrix} d\eta \\ d\xi \\ d\alpha \end{Bmatrix} \tag{16}$$

El cálculo de las contribuciones diferenciales de las dos componentes de la desviación de la vertical  $\eta$  y  $\xi$  (medidas a lo largo del primer vertical, positiva hacia el Este, y el meridiano, positiva hacia el Norte respectivamente), y el azimut geodésico  $\alpha$  se obtienen a partir de las conocidas relaciones:

$$\begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\Lambda-\lambda)\cos\phi \\ \Phi-\phi \\ A-(\Phi-\lambda)\sin\phi \end{Bmatrix} \tag{17}$$

donde  $\Lambda$ ,  $\Phi$  y  $A$  son respectivamente, los valores astronómicos directamente observados de la longitud, la latitud y el azimut.

Como veremos más adelante, las tres ecuaciones en (17) son válidas solo bajo condiciones ideales en que los sistemas cartesianos geocéntricos implícitos en la definición de las coordenadas astronómicas y geodésicas son paralelos.

Diferenciando las ecuaciones (17) considerando que las variables astronómicas  $\Lambda$ ,  $\Phi$  y  $A$ , son cantidades físicas y por lo tanto independientes de cambios geométricos que afecten al elipsoide del datum  $D1$ , tenemos:

$$\begin{Bmatrix} d\eta \\ d\xi \\ d\alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\phi & -\eta\tan\phi & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin\phi & -\eta & 0 \end{bmatrix}_{D1} \begin{Bmatrix} d\lambda \\ d\phi \\ dh \end{Bmatrix} \tag{18}$$

La ecuación (18) junto con la (2) discutida anteriormente, permiten calcular los cambios diferenciales en las componentes de la desviación de la vertical ocasionadas por la transformación de un datum  $D1$  a otro  $D2$ .

Un resultado más general se puede obtener partiendo de la definición básica de las desviaciones de la vertical (Soler *et al.*, 1989):

$$\eta = - \frac{1}{(N+h)\cos\phi} \frac{\partial N_g}{\partial \lambda} \tag{19}$$



$$\xi = - \frac{1}{M+h} \frac{\partial N_g}{\partial \phi} \quad (20)$$

Diferenciando las ecuaciones (19) y (20) y haciendo uso de estos resultados en la ecuación para  $d\alpha$  se puede probar que la ecuación (18) toma la forma más rigurosa:

$$\begin{Bmatrix} d\eta \\ d\xi \\ d\alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\phi & -\eta \frac{M+h}{N+h} \tan\phi & \frac{\eta}{N+h} \\ 0 & -1 + \xi \frac{3M(N-M)}{N(M+h)} \tan\phi & \frac{\xi}{M+h} \\ \sin\phi & \eta \frac{(M-N)-(M+h)\cos^2\phi}{(N+h)\cos^2\phi} & \frac{\xi}{N+h} \tan\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\lambda \\ d\phi \\ dh \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Una consecuencia inmediata de la ecuación (21) es que se reduce a la (18) en el caso de aproximación esférica, esto es cuando  $M=N=a$ . La ecuación (21) también muestra claramente que en cualquier caso (esférico o elipsoidal) la última columna de la matriz de orden  $3 \times 3$  se puede reemplazar por ceros. Consecuentemente, para todos los cálculos prácticos nos podemos limitar al uso de la ecuación (18).

### Aplicaciones

Se ha efectuado en este trabajo una aplicación de la ecuación (16), que naturalmente lleva en principio la implementación de las ecuaciones (18) y (2).

Se eligió como datum D1 el SAD69 y como D2 el WGS84, es decir, se trata de transformar componentes de la desviación de la vertical presumiblemente conocidas en el datum continental SAD69, definido por medio de observaciones geodésicas clásicas, al datum geocéntrico WGS84 definido mediante observaciones satelitales de GPS.

Aquí nos interesa exclusivamente tener una idea general de la magnitud de las correcciones y consecuentemente no transformaremos casos individuales de desviaciones astrogeodésicas que puedan ser conocidas en puntos aislados.

El primer paso es establecer la relación geométrica entre los datums en cuestión. Esto implica no sólo conocer la relación espacial entre los ejes coordenados asociados con los dos datums (tres traslaciones, tres rotaciones, y un factor de escala) sino también, las diferencias en dimensión y forma de los dos elipsoides involucrados en el problema.

Recientemente, se ha investigado el valor de los parámetros definiendo esta transformación, sin embargo, el análisis se redujo sólo a la obtención de las tres traslaciones [Souto-Fortes *et al.*, 1989]. Se debe recordar que la influencia de las rotaciones en el valor final de las traslaciones es significativa, sobre todo en casos como el del datum sudamericano donde alguna de las rotaciones se aproxima a 1". Esto implica que la orientación astronómica del datum SAD69, por una u otra razón, no es óptima. Debido a la posible contribución de las rotaciones en las traslaciones del SAD69, se prefirió elegir los siete parámetros publicados en Leick y van Gelder [1975] donde las rotaciones no se supusieron cero sino que se introdujeron como incógnitas y fueron estimadas. Estos valores (ver Tabla 1) fueron obtenidos usando siete estaciones Doppler referidas, en aquella época, al sistema NWL9D.

Tabla 1  
Parámetros de las Transformaciones entre varios Sistemas de Referencia

Transformaciones de Sistemas	$\Delta x$ (m)	$\Delta y$ (m)	$\Delta z$ (m)	$\delta \epsilon$ (")	$\delta \psi$ (")	$\delta \omega$ (")	$\delta s$ (ppm)
SAD69 al NWL9D	-39.41	+7.75	-37.36	+0.16	-0.90	+1.18	-0.99
NWL9D al WGS84	0	0	+4.5	0	0	-0.814	-0.6
SAD69 al WGS84	-39.41	+7.75	-32.86	+0.16	-0.90	+0.366	-1.54
WGS84 al WGS84(GPS)	-0.021	-0.011	-0.070	-0.0075	+0.0027	+0.0013	-0.164
SAD69 al WGS84(GPS)	-39.431	+7.739	-32.930	+0.1525	-0.8973	+0.3673	-1.704

La transformación entre el SAD69 y el WGS84 (GPS) se determina a partir de la siguiente secuencia:

SAD69 → NWL9D → WGS72 → WGS84(Doppler) → WGS84(GPS)

Los valores requeridos para implementar los pasos intermedios de la transformación SAD69 → WGS84(GPS) se pueden consultar en Soler y Hothem [1989] y están reproducidos en la Tabla 1. El lector habrá notado que se ha hecho una distinción de sistemas WGS84, dependiendo de si su definición está ligada a observaciones Doppler (ver Department 1988] o GPS. Ultimamente es posible hacer esta diferenciación debido a la colocación de instrumentos GPS y Doppler en varias estaciones pertenecientes a la red global responsable de las observaciones usadas en la predicción de las órbitas de los satélites, bien sean de la constelación Doppler o GPS. Una investigación reciente [Fell *et al.*, 1992] ha determinado rigurosamente los parámetros de la transformación entre los dos sistemas. Naturalmente, en el próximo futuro, GPS pasará a ser (si ya no es) el único sistema satelital para uso de aplicaciones geodésicas y de agrimensura. No en vano, agencias civiles como el National Geodetic Survey (NGS) en U.S.A., están distribuyendo efemérides precisas de la constelación GPS a todo usuario interesado

en conseguir las. Estas efemérides ya no están referidas al sistema WGS84, sino a otro sistema geocéntrico basado en observaciones VLBI que son mucho más precisas y se fundamentan en señales recibidas de fuentes extragalácticas como cuásares y púlsares.

Una vez conocidos los siete parámetros de la transformación SAD69 → WGS84 (GPS) así como la dimensión y forma de los elipsoides asociados con estos dos datums las correcciones  $d\eta$  y  $d\xi$  son fáciles de obtener.

Las Figuras 2 y 3 representan precisamente estas correcciones (en ") aplicadas al datum SAD69 que se supone cubre todo el continente sudamericano. Para contrastar estos valores con otro datum más local y de características menos continentales como es el datum de Campo Inchauspe en la Argentina (ver por ejemplo, Usandivaras y Rodríguez, 1988) las Figuras 4 y 5 representan otra serie de correcciones  $d\eta$  y  $d\xi$  aplicadas a este caso particular.

Es evidente que comparando las Figuras 2 con 4, y 3 con 5, se aprecia como ya se conocía de antemano, que el datum SAD69 es el más geocéntrico de los dos. Consecuentemente, las correcciones requeridas para convertir componentes de la desviación de la vertical del datum SAD69 al WGS84(GPS) son inferiores a las de una transformación similar usando el datum Campo Inchauspe.

Tabla 2  
Parámetros de algunos elipsoides de referencia

Sistema coordinado (Datum)	Elipsoide de referencia	a (m)	1/f
AGD	AN (or SA 69)	6378160	298.25
ED 79	International	6378388	297
GEM 8	GEM 8	6378145	298.255
GEM 9 (or GEM 10)	GEM 9 (or GEM 10)	6378140	298.255
GEM 10B	GEM 10B	6378138	298.257
GEM-T1	GEM-T1	6378137	298.257
NAD 27	Clark 1866	6378206.4	294.9786982
NAD 83	SGR 80	6378137	298.257222101
NWL 9D = NSWC 9Z2	WGS 66	6378145	298.25
SAD 69	SAD 69 (or AN)	6378160	298.25
WGS 72	WGS 72	6378135	298.26
WGS 84	WGS 84	6378137	298.257223563

Notas: AGD = Datum Geodésico Australiano; AN = "Australian National"; ED = Datum Europeo; GEM = "Goddard Earth Model"; SGR = Sistema Geodésico de Referencia; NAD = "North American Datum"; NSWC = "Naval Surface Warfare Center"; NWL = "Naval Weapons Laboratory"; SAD69 = Datum Sudamericano de 1969; WGS = "World Geodetic System".

Cuando se consideran las posibles diferencias geométricas entre los datums SAD69 y WGS84 (GPS), la máxima corrección sistemática que se debe aplicar a las componentes de la desviación de la vertical es del orden de 2" en cada componente.

Es prudente pensar que en el futuro, una vez que los diferentes países sudamericanos se equipen con instrumentos GPS, podrán ser realizadas determinaciones más precisas entre los datums SAD69 y el geocéntrico WGS84. Si ese es el caso, nuevos valores de  $d\eta$  y  $d\xi$  podrán ser determinados aunque no se anticipan cambios drásticos con respecto a los valores publicados en el presente estudio.

### Conclusiones

En este trabajo, se han introducido las fórmulas generales para transformar componentes de la desviación de la vertical conocidas en un datum no geocéntrico, cualquiera que éste sea, a otro datum geocéntrico. Estas transformaciones son fundamentales en el caso de que se quiera comparar desviaciones de la vertical obtenidas usando técnicas modernas de GPS y nivelación, con valores ya archivados, calculados antaño y referidos a datums no geocéntricos. La metodología usada aquí está basada en notación matricial que hace más lógico el seguimiento del procedimiento, además de facilitar su implementación usando rutinas standard al alcance de cualquier programador de computadoras.

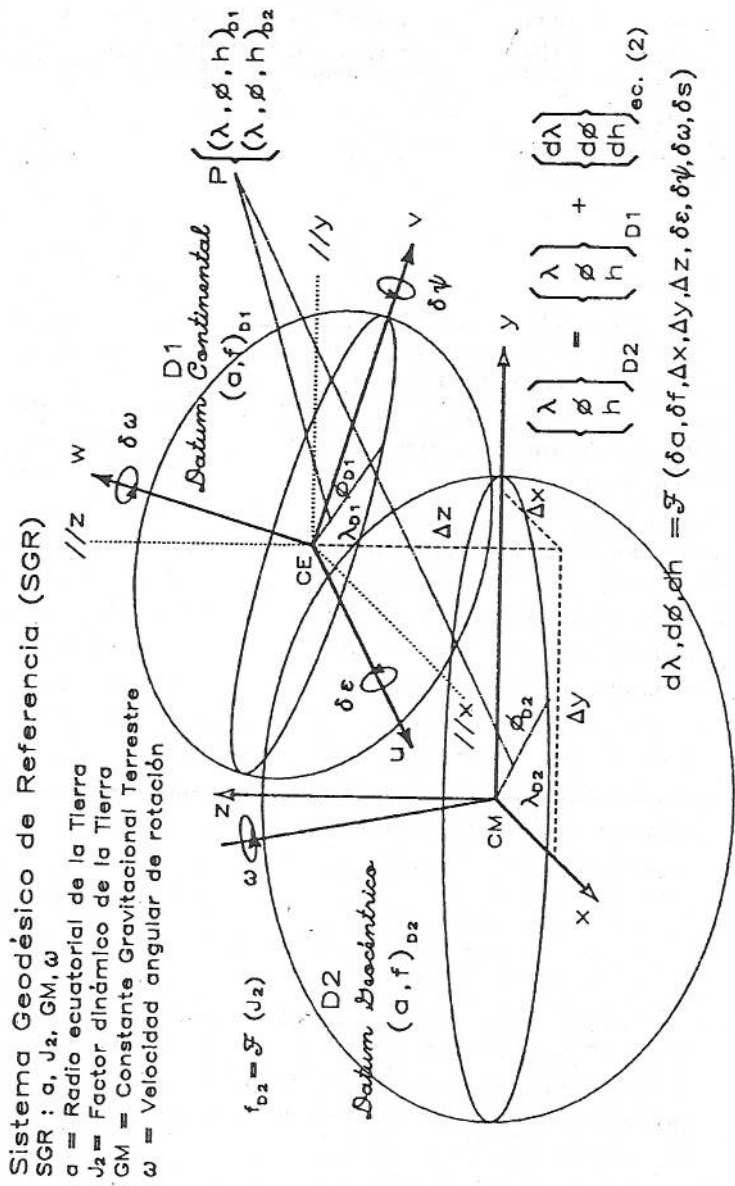
Se han realizado dos ejemplos específicos comprendidos en el área sudamericana (SAD69 y Campo Inchauspe) para presentar al lector una idea concreta de la magnitud de los valores estimados.

### Agradecimiento

El autor quisiera agradecer la participación del Ing. Rubén C. Rodríguez, cuyas revisiones mejoraron la versión final de este trabajo.

### Referencias

- Chen, J.Y., 1982, "Geodetic datum and Doppler positioning", *Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz*, vol. 39, Graz, Austria.
- Dedes, G.C., y Cruz, J.Y., 1991, "Deflections of the vertical from GPS and leveling at Vandenberg AFB, California", *EOS Trans. Amer. Geophysical Union*, 72(44), 117.
- Department of Defense World Geodetic System 1984, 1988, *DMA TR 8350.2*, The Defense Mapping Agency, Washington, D.C., USA.
- Evans, A.G., Soler, T., Hothem, L.D., Stein, W.L., Hermann, B.R. y Carlson, Jr., A.E., 1989, "Vertical deflections and astronomic azimuth derived from GPS and leveling:



$(x, y, z)$  = Sistema Cartesiano Geocéntrico de Referencia (WGS84)

$(u, v, w)$  = Sistema Cartesiano definido por el Datum Continental

Figura 1. Relación entre un datum continental (D1) y uno geocéntrico (D2).

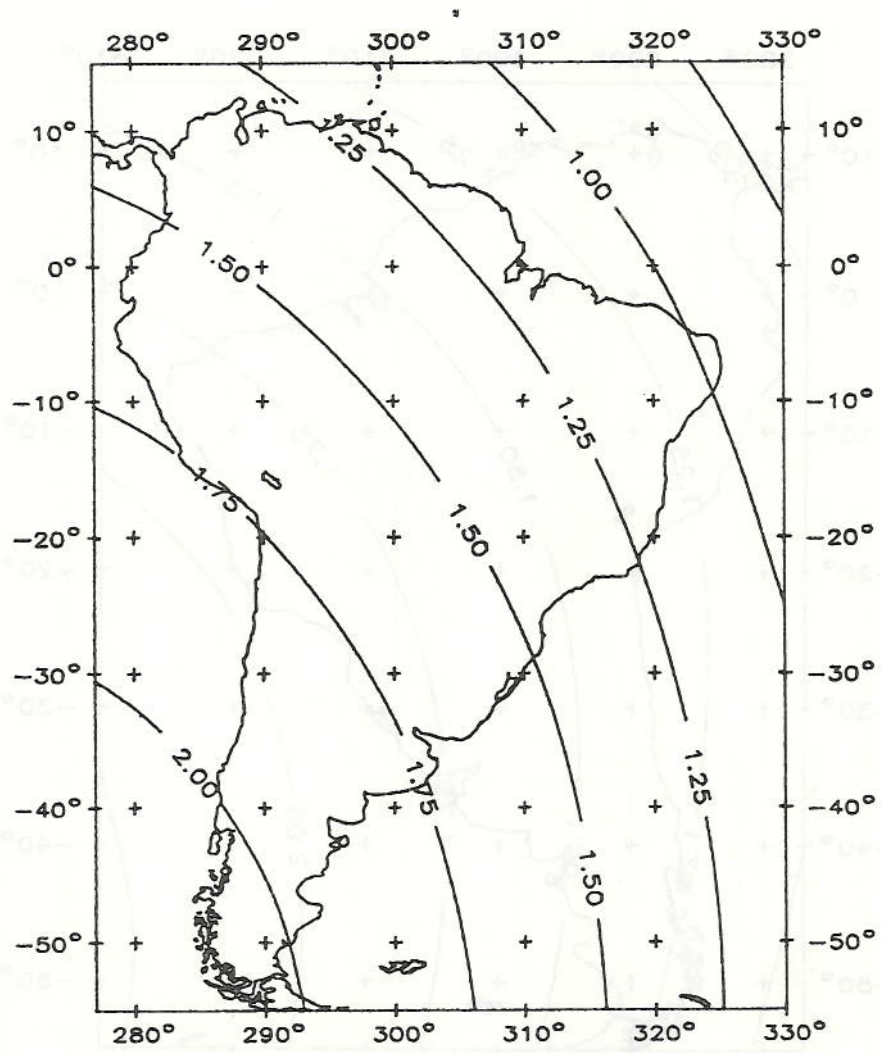


Figura 2. Correcciones  $d\eta$  (en segundos sexagesimales) aplicables a la componente  $\eta$  del datum SAD69 para convertirlas al WGS84.

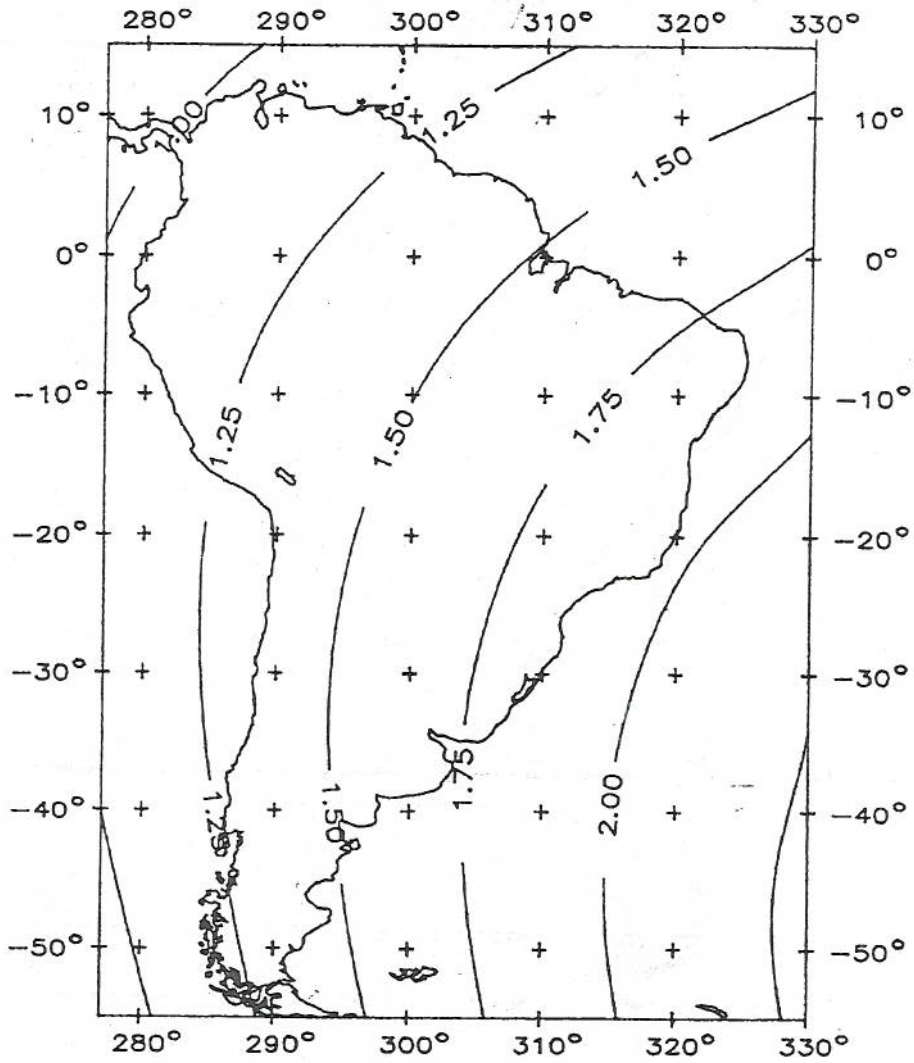


Figura 3. Correcciones  $d\xi$  (en segundos sexagesimales) aplicables a la componente  $\xi$  del datum SAD69 para convertirlas al WGS84.

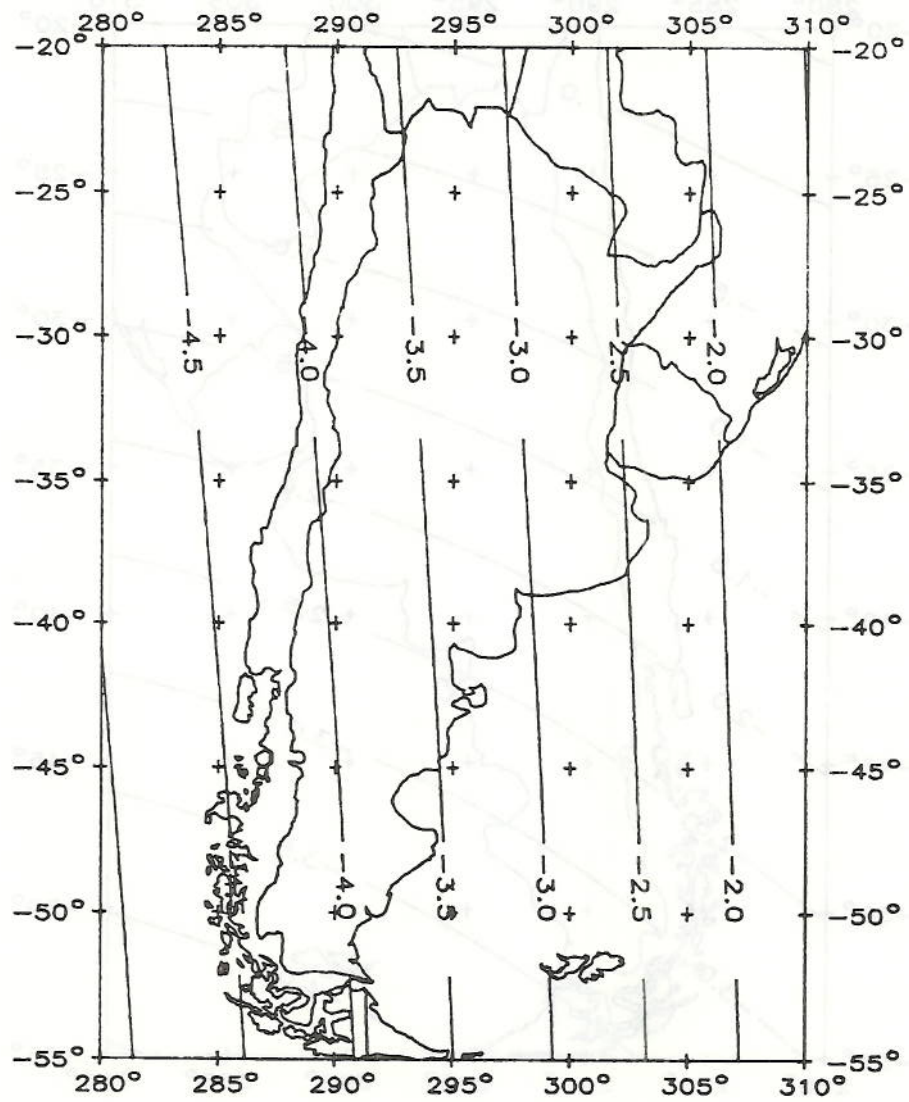


Figura 4. Correcciones  $d\eta$  (en segundos sexagesimales) aplicables a la componente  $\eta$  del datum Campo Inchauspe para convertirlas al WGS84.



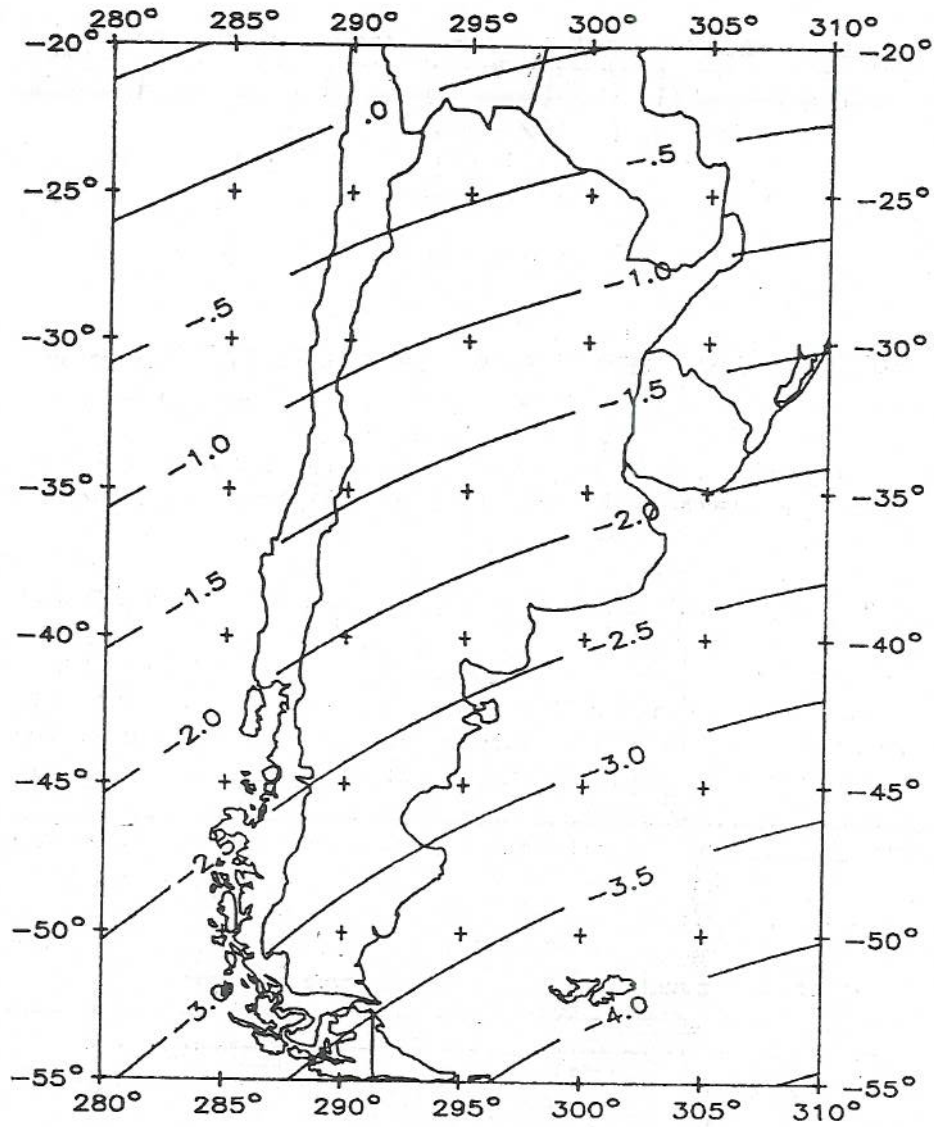


Figura 5. Correcciones  $d\xi$  en (segundos sexagesimales) aplicables a la componente  $\xi$  del datum Campo Inchauspe para convertirlas al WGS84.

- Joint test description and results”, *Proc. Fifth Intl. Geodetic Symp. on Satellite Positioning*, Physical Science Lab., New Mexico State Univ., Las Cruces, NM, USA.
- Fell, P., Swift, E., Cunningham, J. y Malys, S., 1992, “Bridging the gap between TRANSIT and GPS point positioning - Implications of higher-order ionospheric refraction on the realization of the WGS 84 reference frame”, *NSWCDD/TR-92/557*, Naval Surface Warfare Center, Dahlgren, VA, USA.
- Fujii, Y., 1990, “Test observations and their results for determining geoidal height and deflection of vertical with GPS interferometry”, *Japanese Symposium on Earth Rotation, Astrometry, and Geodesy*, 176-180. En japonés.
- Hotine, M., 1969, *Mathematical Geodesy, ESSA Monograph 2*, U.S. Department of Commerce, Government Printing Office, Washington, D.C.
- Lamé, G., 1837, “Sur les surfaces isothermes”, *Liouville Journal*, (1), 2.
- Leick, A., y van Gelder, B.H.W., 1975, “On similarity transformations and geodetic network distortions based on Doppler satellite observations”, *Report No. 235*, Dept. of Geod. Sci., The Ohio State Univ., Columbus, OH, USA.
- Molodenskii, M.S., Eremeev, V.F. y Yurkina, M.L., 1960, *Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth*. Traducida del ruso por Israel Program for Scientific Translation (1962), National Technical Information Service, Springfield, VA, USA.
- Mueller, I.I., 1969, *Spherical and practical astronomy as applied to geodesy*, Frederik Ungar Publ. Co. New York, NY, USA.
- Pierozzi, M., 1989, “Alcune considerazioni sulla trasformazione dal sistema WGS84 ad un sistema geodetico locale”, *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, 68, 45-55.
- Rapp, R.H., 1983, “Geoid undulation computations for Doppler positioning requirements”, *Proc. 43rd Annual Meeting*, American Congress on Surveying and Mapping, Washington, D.C.
- Soler, T., 1976, “On differential transformations between Cartesian and curvilinear (geodetic) coordinates”. *Report No. 236, Dept. of Geod. Sci., The Ohio State Univ., Columbus, OH, USA.*
- Soler, T., y van Gelder, B.H.W., 1987, “On differential scale changes and the satellite Doppler system z-shift”. *Geophys. J. Royal Astr. Soc.* 91, 639-656.
- Soler, T. y Hothem, L.D., 1988, “Important parameters used in geodetic transformations”. *Journal of Surveying Engineering*, 115, 414-417.
- Soler, T., Carlson, Jr., A.E., y Evans, A.G., 1989, “Determination of vertical deflections using the Global Positioning System and geodetic leveling”. *Geophys. Res. Lett.*, 7, 695-698.
- Souto-Fortes, L.P., Ferreira-Cagnin, I., Zepeda-Godoy, R.A. y Blitzkow, D., 1989, “Determinação dos parametros de transformação entre os sistemas NWL-10D, NSWC-9Z2, WGS-84 e o SAD-69”. XIV Congresso Brasileiro de Cartografia, Anais vol. 1, 157-165.

Usandivaras, J.C. y Rodríguez, R.C., 1988, "Sistemas de referencias". 15ª Reunión Científica de Geofísica y Geodesia. Instituto Geográfico Militar, Buenos Aires, República Argentina.

Vaňíček, P. y Krakiwsky, E., 1982, *Geodesy: The concepts*. North-Holland Publ. Co., New York, NY, USA.